International Journal of Mathematical Archive-2(6), June - 2011, Page:1002-1021
IJMA Available online through www.ijma.info ISSN 2229 – 5046

REVOLUTION DE L'OPERATEUR DE DIRAC DANS L'ANALYSE DE CLIFFORD

Mohamed Ben Ammar*

UNIVERSITE DE CARTHAGE
Département de Mathématiques Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Nabeul
El MREZKA 8000, Hammamet –TUNISIE

E-mail: M_benammar@ymail.com

(Received on: 09-05-11; Accepted on: 18-05-11)

ABSTRACT

Given (R^n; q) the quadratic space of signature (r,s) with r + s = n. The problem we are concerned with is the identification of the Cliffordien distributions and spinoriel distributions defined on the group spin(r,s) at values in the Clifford algebra CL(IR^n); (resp the spinors space) biinvariant by its maximal subgroup compact K = spin(r) x spin(s)); the own solutions of Dirac Operator.

To solve this problem, we profit from the existence of the close relation between the Dirac D operator and the Laplace operator realized by the equality $D^2 = \Box$.

On The other hand, we can not forget the basic role of the coordinator that the universal morphism plays between the spin(r,s) groups and SO(r,s) and its relevement.

Thus, these two powerful tools contribute to the complete identification of Cliffordien distributions from spheric distributions and vise versa.

I can be said that the Clifford analysis is a refinement of the harmonic analysis. Her techniques are used to construct a fundamental solution for first order homogeneous differential operators on the n-dimensional hyperbolic space.

In most of the literature on Clifford analysis the Dirac operator considered is the elliptic one acting on a flat euclidean space.

For these reasons, the Dirac operator is currently making a revolution to realise the unification of the spinoriel geometry and the Clifford analysis by using the calculation techniques of the Clifford algebra.

Keywords: *Clifford Algebras, Dirac Operators, Spinorial morphysmes, distributions.*

RESUME:

Soit ($E_{r,s}$,q) l'espace quadratique IR^n muni de la forme quadratique q de signature(r,s), avec r+s=n.

Le problème que nous préoccupe c'est la détermination des distributions Clifordiennes (resp spinorielles) définies sur le groupe Spin(r,s) à valeurs dans l'algèbre de Clifford CL(IR^n), (resp l'espace des spineurs S) bi-invariantes par son sous-groupe compact maximal, = spin(r) x spin(s)) ; solutions propres de l'opérateur de Dirac D. Pour résoudre ce problème nous profitons de l'existence de l'intime relation entre l'opérateur de Dirac D et l'opérateur de Laplace $\Box$réalisée par l'égalisée

$D^2 = \Box$, lorsque D et $\Box$ s'écrivent localement:

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \text{et} \quad \Box = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=r+1}^{r+s} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

D'autre part, nous ne pouvons pas oublier le rôle fondamental du coordinateur que joue le morphisme de revêtement

---

***Corresponding author Mohamed Ben Ammar*, *E-mail: M_benammar@ymail.com**

universel entre les groupes Spin(r,s) et SO(r,s) et de son relèvement.

Par suite ces deux outils puissants contribuent à la détermination complète des distributions Cliffordiennes à partir des distributions sphériques et réciproquement.

On peut dire que l'analyse de Clifford est un raffinement de l'analyse harmonique.

Alors pour ces raisons l'opérateur de Dirac est actuellement entrain de conduire une révolution pour réaliser l'unification entre la géométrie spinorielle et l'analyse de Clifford, en utilisant les techniques de calcul de l'algèbre de Clifford.[11,2,13].

0- INTRODUCTION:

Etant donnée un espace quadratique (IR^n, q) on lui associé son algèbre de Clifford CL(IR^n), son espace des spineurs S, son groupe spinoriel G =Spin (r,s) et son opérateur de Dirac D exprimé à l'aide de (e_i) base orthonormée de IR^n relativement à q. Puisque D opère sur les champs des spineurs et les champs de Clifford par dérivation et multiplication par des éléments de CL(IR^n).

Nous sommes obligés à définir des espaces topologiques sur des espaces sur lesquels opèrent les distributions.

Nous notons par C_c^∞ (Spin(r,s),S), (resp C_c^∞ (Spin(r,s) CL(IR^n)), l'espace des champs infiniment différentiables sur G à support compact et à valeurs dans

S, (resp CL(IR^n)).

L'extension de la forme quadratique q à CL(IR^n), détermine un produit scalaire entre les champs Cliffordiens qui induit par la suite un produit scalaire entre les champs des spineurs.

Pour m $\in$ IN, Ω compact de G ; f: $\Omega \to$ CL(IR^n) de Classe C^∞ On pose:

$$\|f\|_{m,CL}^{\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \|\partial^\alpha f(x)\|_{CL}$$

où $\| \;\|_{CL}$ est la norme déduite du produit scalaire sur CL(IR^n).

De même, on définit une topologie sur C_c^∞ (G ; S) de la même façon par les normes $\| \;\|_{m,CL}^{\Omega}$ déduite du produit scalaire sur S.

Ainsi ces métriques sur ces espaces nous permet d'imposer la définition des distributions:

Définition 0.1: Une forme linéaire T sur C_c^∞ (G ,CL(IR^n)) (resp C_c^∞ (G ; S) est une distribution si ses restrictions à chaque compact Ω de G , est continue au sens des topologies définies ci-dessus sur chaque espace correspondant.
Par suite, nous notons par D' (G , CL(IR^n)), (resp D' (G , S)) l'espace des distributions T sur C_c^∞ (G ,CL(IR^n)) (resp C_c^∞ (G ; S).

Alors nous donnons la définition suivante :

Définition 0.2: Une distribution spinorielle T (resp Cliffordienne) est une distribution sur $M = {}^{Spin(r,s)}/_{Spin(r)xSpin(s)}$ invariante par K =Spin(r) x Spin(s), qui est à valeurs dans S (resp CL(IR^n)) et est solution propre de l'opérateur de Dirac D : DT + λT = 0.

La détermination des distributions sur M conduit à la recherche des solutions distributions de l'équation D $T = \alpha T$ qui sont invariantes par K .

Seulement les résultats qu'on va trouver dépendent de la métrique puisque les spineurs, et l'opérateur de Dirac sont liés à la métrique choisie. [3,7]

I. Invariance de l'opérateur de Dirac:

Théorème1-1: L'opérateur de Dirac D est invariant par la représentation adjointe du groupe compact K .

Preuve : Soit $\phi \in C_c^\infty$ (Spin (p,q), CL(IR^n))

$\forall$ x $\in$ Spin(r,s) ; $\phi(x) = \sum_\varepsilon \phi_\alpha(x)e_\alpha$ où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ avec $1\leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n$.

$\forall$ u $\in$ K Ad(u)=R_u o L_u avec u = $u_1. u_2 \ldots.. u_{2k}$.

$\left\|u_j\right\|_{CL} = 1$; $\forall$ j, $Ad(u)e_\alpha = (u_1u_2\ldots u_{2k})e_\alpha(u_1u_2\ldots u_{2k})^{-1} = (-1)^{2kp}e_\alpha = e_\alpha$.

Calculons:

$$D\, ad(u)\phi(x) = D\big(\sum_\alpha \phi_\alpha(x)Ad(u)e_\alpha\big)$$

$$= D\big(\sum_\alpha \phi_\alpha(x)(u_1u_2...u_{2k})e_\alpha(u_1u_2...u_{2k})^{-1}\big)$$

$$= D\big(\sum_\alpha \phi_\alpha(x)e_\alpha = \sum_{\alpha,j} e_j e_\alpha \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x) = D\phi(x)$$

De même :

$$Ad(u)D\phi(x) = Ad(u)D\left[\sum_\alpha \phi_\alpha(x)e_\alpha\right]$$

$$= Ad(u)\,\big(\sum_{\alpha,j} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)e_\alpha\big) = \sum_{\alpha,j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\phi_\alpha(x)Adu(e_je_\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha,j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)(u_1...u_{2k})e_je_\alpha(u_1u_2...u_{2k})^{-1}.$$

$$= \sum_{\alpha,j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)e_je_\alpha(-1)^{(p+1)(2k)} = \sum_{\alpha,j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)e_je_\alpha = D\phi(x)$$

D'où D.Ad(u)=Ad(u).D $\forall$ u $\in$ K .

Corollaire 1-2: Si ϕ est un champ de vecteurs définis sur Spin(r,s) valeurs dans l'algèbre de Clifford ou l'espace des spineurs bi-invariantes par K et solution propre de D. Alors Ad(u) ϕ pour u $\in$ K est encore solution propre de D pour la même valeur propre. [8,9].

II. Champs de Clifford et champs de Spineurs solutions propres de l'opérateur de Dirac:

Théorème 2-1: Soit ϕ un champ de Clifford (resp de Spineurs) de classe C^∞ défini sur Spin(r,s), à valeurs dans CL(IR^n), (resp S). Alors on a:

(i) Si ϕ est une solution propre de l'équation $D\phi = \lambda\phi$; alors ses composantes ϕ_α relativement la base de CL(IR^n) (resp S) sont des fonctions propres pour l'opérateur de Laplace associées à la valeur propre λ^2.

(ii) Réciproquement si les composantes ϕ_α d'un champ de vecteur ϕ de classe C^∞ sur Spin(r,s) à valeurs dans CL(IR^n) (resp S) sont des fonctions propres relativement à $\square$ associées à la valeur propre λ^2. Alors il existe un champ de vecteur ψ solution propre de l'équation $D\psi = \lambda\psi$.

Preuve: Faisons la démonstration pour les champs Cliffordiens on a raisonnement analogue pour les champs de spineurs.

(1): Soit $\phi : \Omega \to CL(E)$ de classe C^∞ , L'opérateur de Dirac D appliqué à ϕ nous donne :

$$D\phi = \sum_{\alpha}(\sum_{j=1}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_j})e_j e_\alpha = \lambda\phi \ , \ \lambda \in \text{IR}.$$

Alors le produit $e_j e_\alpha$ contient $(|\alpha| + 1)$ ou $(|\alpha| - 1)$ termes selon $j\in\alpha$ ou $j\notin\alpha$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p)$ avec $p\in [|1, n|]$ de plus nous avons:

(a) $e_j e_\alpha = (-1)^{|\alpha|} e_\alpha e_j$ si $j\notin\alpha$.
(b) $e_j e_\alpha = (-1)^{|\alpha|-1} e_\alpha e_j$ si $j\in\alpha$, avec $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p$.

Alors on a:

$$D\phi = \sum_{\beta} F_\beta(x) e_\beta$$

Où chaque fonction F_β est de la forme:

$$F_\beta(x) = \sum_{j=1}^{n} \pm \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_j}$$

Pour chaque choix de signes $\pm$ et pour chaque β fixé le $\alpha = \alpha(j)$ est choisi. Ainsi $\alpha \cup \{j\} = \beta$ si $j \in \beta$ ou $\alpha = \beta\cup\{j\}$ si $j \in\beta$. Alors $D\phi = \lambda\phi$ si et seulement si les 2^n fonctions numériques ϕ_α satisfont les 2^n équations différentielles du 1^{er} ordre déterminées par $F_\beta = \lambda\phi_\beta$. Ce système est équivalent:

$\Box\phi_\alpha = \lambda^2\phi_\alpha$ et par suite chaque ϕ_α est solution propre de $\Box$ pour la valeur propre λ^2.

Réciproquement si $\Box\phi_\alpha = \lambda^2\phi_\alpha \Rightarrow \phi = \lambda^2\phi_\alpha$.

Et alors le champ ϕ défini par $\psi = D\phi + \lambda\phi$ est solution de l'équation:

$D\psi = \lambda D\phi + \lambda^2\phi = \lambda\psi$.

Exemple: Prenons l'espace IR^{n+1}, muni du produit scalaire:

$[x,y] = x_0y_0 - x_1y_1\ldots . x_ny_n$.

L'espace hyperbolique réel de dimension n est l'espace homogène $M = G/K$ où G est le groupe de Lorenz $SO_0(1, n)$ $(n \geq 2)$ et K le groupe $SO(n)$.

Le groupe $SO_0(1,n)$ est la composante connexe de l'identité du groupe $SO(1,n)$ des transformations linéaires de IR^{n+1} de déterminant 1 laissant invariante la forme quadratique $Q(x)= x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Le groupe $K=SO(n)$ est identifié au sous groupe de G des transformations laissant ox_0 fixe. L'espace M peut être identifié à l'ensemble des points $(x_0, x_1,\ldots,x_n)$ vérifiant $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\ldots - x_n^2 = 1$, $x_0 > 0$.

Nous identifions les fonctions sur M aux fonctions définies sur G invariantes à droite par K. Soit:

$u \in \text{IR}^{n+1}$ telsque $u_0 = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$

C'est à dire un point de la sphère S de dimension (n-1), de centre a et de rayon 1, située dans l'hyperplan $x_0 = 1$.

Soit F la fonction définie sur le cône ouvert $C = \{x\in \text{IR}^{n+1}/[x, u] > 0,\ x_0 > 0\}$ $\phi(x) = [x, u]^{-\alpha}$ (d'après l'inégalité de Schwarz on a $[x,u]>0$)

La fonction ϕ est homogène de degré $(-\alpha)$ et est solution de l'équation $\Box\phi = 0$,

il en résulte que : $\Box([x, u]^{-\alpha}) + \alpha(n - 1-\alpha)[x, u]^{-\alpha} = 0$ par suite la fonction φ_α défini sur M par:

$\varphi_\alpha(x) = \int_{S^{n-1}} [x, u]^{-\alpha}$ du est solution de $\Box\varphi_\alpha + \alpha(n - 1 - \alpha)\varphi_\alpha = 0$ et est invariant par K. De plus $\varphi_\alpha(a) = 1$. [13, 14]

Proposition 2-2: Les solutions de $\square f+\lambda_\alpha f=0$ qui sont invariantes par K sont proportionnelles à φ_α.
Une fonction f sur M, invariante par K ne dépend que de la distance r = r(a,x) de a à x. Pour une telle fonction, l'opérateur $\square$ s'écrit:

$$\square f = (\mathrm{sh} r)^{1-n} \frac{d}{dr}[(\mathrm{sh} r)^{n-1} \frac{df}{dr}]$$

Les solutions de l'équation différentielle:

$(\mathrm{sh} r)^{1-n} \dfrac{d}{dr}[(\mathrm{sh} r)^{n-1} \dfrac{df}{dr}] + \lambda f = 0$, constituent un espace vectoriel de dimension1.

Il s'en suit, puisque:

$\lambda_\alpha=\lambda_{n-1-\alpha} \Rightarrow \varphi_{n-1-\alpha} = \varphi_\alpha$ [13; 14]

Corollaire 2-3: Si ϕ : Spin(r,s) $\rightarrow$ CL(IR^n) un champ de vecteurs de classe C^2 et $\mu \in$ C ; $(\omega_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de vecteurs unitaires de IR^n tels que $D\phi = \mu\phi$: Alors chaque composante ϕ_α de ϕ relativement à e_α est solution propre de$\square$, associe à la valeur propre μ^2 et est de la forme $C\, e^{\mu(x/\omega_\alpha)}$ où C est une constante.

Preuve: $\square f_\alpha = \mu^2\phi_\alpha$, $\phi_\alpha(x) = C\, e^{(\mu/\omega_\alpha)}$ est solution propre de $\square$ si $\|\omega_\alpha\|=1$.

Théorème 2-4: Soit Ω un ouvert de IR^n .

Soit $\phi : \Omega \rightarrow IR$ l'application de Ω de classe C^∞ définie par:

$\phi(x) = ch(\lambda\, x|a)$ pour $\lambda\in IR^*_+$, $a \in S^{n-1}$ sphère unité de IR^n .

Alors on a:

(1) ϕ est une solution propre de $\square$ associe la valeur propre λ^2 :
(2) Le champ de Clifford ψ : $\Omega\rightarrow$ CL(IR^n) défini par : $\psi = \lambda\, \phi^1_{CL(IR^n)} + D\phi$ est une solution propre relativement l'opérateur de Dirac D, associée la valeur propre λ.

De plus ϕ et ψ sont bi-invariantes par K = Spin(r) x Spin(s) [6, 7,9].

Preuve:

(1) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = \lambda a_i sh(\lambda x \mid a)$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} = \lambda^2 a_i^2 ch(\lambda x \mid a)$$

$\square\phi=\lambda^2\|a\|^2\phi(x)$ pour $a\in S^{n-1}$, $\|a\|=1$.

(2) Pour $\psi =\lambda\phi + D\phi$

$D\psi =\lambda D\phi + D^2\phi$, or $D^2 =\square$.

$= \lambda D\phi + \lambda^2\phi = \lambda(D\phi + \lambda\phi) = \lambda\psi$.

Théorème 2-5: Soit $\theta : \Omega \rightarrow IR$ l'application de Ω de classe C^∞ définie par :
$\theta(x) = \sin(\lambda x| a)$¸ $\lambda \in IR^*_+$, $a\in S^n$.

Alors on a:

(1) θ est une solution propre associée $-\lambda^2$ relativement à$\square$.
(2) Le champ de Clifford $\psi = i\lambda\theta.1_{CL(IR^n)}+D\theta$ est un champ de Clifford associé
à la valeur propre $i\lambda$ relativement à l'opérateur de Dirac D.
(3) θ et ψ sont bi-invariants par K = spin(r) x Spin(s)

Preuve: Démonstration analogue au théorème 1.

Corollaire 2-6:

Soit $\omega : \Omega \to IR$ l'application de classe C^∞ sur Ω définie par:

$\omega(x) = \alpha\cos(\lambda x|a) + \beta\sin(\lambda x|b)$, $\lambda \in IR_+^*$; $a,b \in S^{n-1}$; β , $\alpha \in IR$.

Alors on a:

(1) ω est une solution propre de $\square$ associée $-\lambda^2$
(2) $\Gamma = i\lambda\omega 1_{CL(IR^n)}+D\omega$ est un champ de Clifford solution propre relativement à D, associé à $i\lambda$.

Théorème 2-7: Soient $(\phi_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de champs de vecteurs définis sur Ω ouvert de IR^n, à valeurs dans $CL(IR^n)$-module, solutions propres relativement à l'opérateur de Dirac D associé à la valeur propre λ et H_m un polynôme harmonique spineur relativement D, $DH_m=0$, homogène de degré m, à coefficients dans l'algèbre de Clifford.

Alors on a:

(1) Le champ de vecteur $\psi_\lambda = H_m\phi_\lambda$ est solution propre relativement à D.
(2) Si ϕ_λ,H_m sont bi-invariantes par K =Spin(r) x Spin(s) alors ψ_λ l'est aussi.

Preuve:

(1) $DH_m = 0$, $D\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$, $\dfrac{\partial\Psi_\lambda}{\partial x_i} = \dfrac{\partial H_m}{\partial x_i}\phi_\lambda + H_m\dfrac{\partial\phi_\lambda}{\partial x_i}.$,

$$D\Psi_\lambda = \sum_{i=1}^{n} e_i\frac{\partial\Psi_\lambda}{\partial x_i} = (\sum_{i=1}^{m} e_i\frac{\partial H_m}{\partial x_i})\phi_\lambda + H_m\sum_{i=1}^{m} e_i\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x_i}$$
$$D\Psi_\lambda = (DH_m)\phi_\lambda + H_m\lambda\phi_\lambda = \lambda H_m\phi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda$$

(2) Puisque D o Ad(k) = Ad(k).D et si H_m et ϕ_λ sont bi-invariantes par:

K = Spin(r) x spin(s).

$\Rightarrow \psi_\lambda$ sera bi-invariant, car $\forall i, j , k \in [|1, n|]$ $e_ie_je_k = e_ke_ie_j$.

III. Décomposition de l'éspace des solutions propre de D:

Théorème 3-1: Soient H_m un polynôme harmonique relativement $\square$ homogène de degré m, à coefficients dans l'algèbre de Clifford $CL(IR^n)$, et $(\phi_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de champ de vecteur défini sur Ω à valeurs dans $CL(IR^n)$ ou $S(IR^n)$ solution propre relativement D associé à λ alors on a:

(1) $\psi_\lambda= (DH_m)\,\phi_\lambda$ est un champ de vecteur solution propre D associé à λ.
(2) De plus H_m et ϕ_λ sont bi-invariantes par K = spin(r) x Spin(s) alors ψ_λ sera bi-invariant par K .

Preuve: Puisque $D^2 = \square$ dans l'espace euclidien et que $\square H_m=0 \Rightarrow D(H_m) \in$ Ker D et si $D\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$.

$\Rightarrow D\psi_\lambda = (D^2H_m)\phi_\lambda + (DH_m)D\phi_\lambda = \lambda DH_m\phi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$.

Corollaire 3-2: Pour $\lambda\in IR_+^*$, $m \in IN^*$ fixés.

Etant donné $(\phi^{\lambda+j}_{m-j})_{0\le j\le m}$ un système de fonctions polynômes homogènes de degré m-j, définies sur Ω, à valeurs dans $CL(IR^n)$-modules, solutions propres relativement à l'opérateur de Dirac D, associée à la valeur propre $\lambda+j$ et $(H_j)_{1\le j\le m+1}$ un système de polynômes harmoniques relativement à $\Box$ de degré j à coefficients dans $CL(IR^n)$.

Alors chaque polynôme P dans l'ensemble des polynômes homogènes de degré m à coefficients dans $CL(IR^n)$ solution propre relativement à D peut être écrit uniquement sous la forme:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} D(H_{j+1})(x)\Phi^{\lambda+j}_{m-j}(x) \ ; \ \forall x \in \Omega.$$

IV. Morphisme de revêtement:

Lemme 4-1: L'homomorphisme σ du revêtement du groupe spinoriel dans le groupe spécial orthogonal; est un coordinateur entre l'ensemble des solutions.

propres de l'opérateur de Dirac qui sont définies dans SO(r,s) et l'ensemble des solutions propres pour le même opérateur mais qui sont définies dans le groupe Spin(r,s). [11, 12]

Preuve: σ : Spin(r,s) $\to$ SO(r,s).

$a = a_1a_2\dots a_{2k} \to \sigma_a = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\dots\sigma_{a_{2k}}$, avec σ_{a_j} définit par:

$$\forall x \in IR^n,\ \sigma_{a_j}(x) = x - \frac{2(x,a_j)}{q(a_j)}a_j = -a_j x a_j^{-1} \text{ dans } CL(IR^n)$$

Pour tout $1 \le j \le n$ et tel que $a^\tau a=1$.

Pour $f \in C^\infty(SO(r,s),E)$ où E est un $CL(IR^n)$-module.

Avec $Df = \lambda f$, $\lambda \in IR$ et $\forall g \in SO(r,s)$ on a :

$$f(g) = \sum_\alpha b_\alpha(g)e_\alpha$$

où $e_\alpha = e_{a_1} e_{a_2} \dots e_{a_p}$ pour $1\le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \le n$ et $b_\alpha(g) \in IR$

Comme:

$$D = \sum_{1\le i\le n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$Df(g) = \lambda f(g)$, de plus on a : $D(f \circ \sigma_a) = (Df) \circ \sigma_a$.

Alors $f \circ \sigma_a$ est une fonction définie sur Spin(r,s) et d'après le théorème de Dieudonné tout élément de SO(r,s) est produit d'un nombre pair du type σ_{aj}, nous avons $D(f \circ \sigma_a) = \lambda(f \circ \sigma_a)$ et par suite $f \circ \sigma_a$ est une solution propre de D, définie sur Spin(r,s).

Proposition 4.2: Pour $x\in S^{n-1}$. Alors on a :

(1) Le champ de vecteur $x \to x$ Pff(x) est une solution propre de $\Box$ associé la valeur propre $\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$; bi-invariant par le sous-groupe K=SO(r) x SO(s).

(2) Le champ de vecteur $\phi(x) = \pm\sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}$. Pff(x) +D(x)Pff(x) est une solution propre de D associé la valeur $\sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}$, bi-invariant par K.

Preuve: on sait que $\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{Pff}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Pff}(x)\mathrm{Tr}(x^{-1}e_j)$.

(égalité dans l'algèbre CL (IR^n, q), q forme quadratique de signature (n,o))

$$\mathrm{DPff}(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{Pff}(x)e_j = \frac{1}{2}\mathrm{Pff}(x).\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}(x^{-1}e_j)e_j$$

avec $x^{-1} = \frac{x}{q(x)} = x$ puisque $x \in S^{n-1}$, $q(x) = \| x \| = 1$ où ($\| \|$) est la norme euclidienne)

$\mathrm{Tr}(x^{-1}e_j) = \mathrm{Tr}(\frac{xe_j}{q(x)}) = 1 \quad \frac{1}{q(x)}\mathrm{Tr}(xe_j)$, et :

$$xe_j = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k e_j$$

$$\mathrm{Tr}(xe_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{Tr}(e_k e_j)$$

$$\mathrm{DPff}(x) = \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{q(x)}x_k\mathrm{Tr}(e_k e_j)e_j .$$

Comme (e_ke_j) base orthonormée de l'algèbre de Lie du groupe Spin (IR^n, q).

$$\mathrm{Tr}(e_ke_j) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ k \neq j \\ 1 \ \text{ si } \ k = j \end{cases}$$

Par suite $\mathrm{DPff}(x) = \frac{x\mathrm{Pff}(x)}{2q(x)} = \frac{1}{2}x^{-1}\mathrm{Pff}(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{Pff}(x)$

$\mathrm{D}(x\mathrm{Pff}(x)) = (\mathrm{D}x)\mathrm{Pff}(x) + x\mathrm{D}(\mathrm{Pff}(x) = n\mathrm{Pff}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Pff}(x)$

$= (n+\frac{1}{2})\mathrm{Pff}(x)$. (Puisque $x^2 = q(x) = \|x\|^2=1$).

et comme $D^2 = \Box$.

$D^2(x\mathrm{Pff}x) = (n + \frac{1}{2})\mathrm{D}(\mathrm{Pff}x) = (n+\frac{1}{2})\frac{x}{2}\mathrm{Pff}(x)$

Alors on constate que $\phi(x) = \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\, x\mathrm{Pff}(x) + \mathrm{D}(x\mathrm{Pff}(x)) = \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\,\phi(x)$

$\mathrm{D}\phi(x) = \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{D}(x\mathrm{Pff}(x)) + (n+\frac{1}{2})\mathrm{D}(\mathrm{Pff}(x))$.

$= \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\,(n + \frac{1}{2}) + \mathrm{Pff}(x) + (n + \frac{1}{2})\mathrm{D}(\mathrm{Pff}(x))$.

$= \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\,(n + \frac{1}{2}).\ \mathrm{Pff}(x) + (n + \frac{1}{2})\frac{x}{2}\mathrm{Pff}(x)$.

La bi-invariance par K est due à la formule $\mathrm{Pff}({}^tTxT)=\det(T)\mathrm{Pff}(x)$, $\forall T \in K$

avec ${}^tT = T^{-1}$ et $\det(T) = 1$. [6]

Proposition 4-3: Les translations à gauche et à droite des groupes K = SO(r) x SO(s) et $\mathcal{K}$ = Spin(r) x Spin(s) respectivement sur SO(r,s) et Spin(r,s) sont de classe C^k, $k \geq 1$.

Soit $\alpha \in C_C^k$ (SO(r,s),S) ; (resp C_C^k (Spin(r,s), CL(IR^n)) invariante par K (resp $\mathcal{K}$):

$\gamma^*(\alpha) = \alpha\ \forall\gamma \in$ K ; (resp $\gamma \in \mathcal{K}$)

Alors il existe $\beta \in C^k$ (M, S) ; (resp $\tilde{\beta} \in C_C^k$ ($\mathcal{M}$; CL(IR^n))

unique, telle que si π (resp $\tilde{\pi}$) désigne l'application canonique de SO(r,s) sur

M ; (resp Spin(r,s) sur $\mathcal{M}$) on ait $\pi^*\beta = \alpha$; (resp ($\tilde{\pi}^*\tilde{\beta} = \alpha$).

Considérons l'opération de Dirac D opérant sur les espaces des champ de vecteurs de classe C^∞ sur M = SO(r,s)/SO(r) x SO(s) ;

(resp $\mathcal{M}$ = Spin(r,s)/Spin (r) x Spin (s) à valeurs dans le fibre E un CL(M)-module, (resp le fibre H en CL($\mathcal{M}$)-module).

D possède des valeurs propres discrètes d'ordre de multiplicité finie.

Nous sommes intéressés à donner explicitement le spectre des distributions spinorielles sur M ; (resp $\mathcal{M}$) relativement à D qui est lui même déterminé par

le spectre des champs de vecteurs propres relativement D et qui sont définis sur M (resp $\mathcal{M}$). Ce spectre dépend de celui de l'opérateur de Laplace$\square$. [2, 13, 1]

Désignons par N(λ, SO(r,s),D) ; (resp N(λ,spin(r,s), D) le sous-espace vectoriel de C_C^∞ (SO(r,s),H) ; (resp C_C^∞ (spin(r,s),H) des champs de vecteurs à valeurs dans H un CL(IR^n)-module, solution propre relativement à l'opérateur de Dirac D associées à la valeur propre λ et on note par la même lettre σ^* l'extension de l'homomorphisme de revêtement du groupe spinoriel, à une application de C_C^∞ (SO(r,s),H) dans C_C^∞ (spin(r,s),H). Alors on a :

Théorème 4.4:

1.(a) σ^*o Ad(a) = Ad(a) o σ^* ; $\forall$ a $\in$ SO(r,s).
(b) σ^* o D = D o σ^*
(**c**) Si $\phi \in$ N(λ, SO(r,s),D)) $\sigma^*\phi \in$ N (λ, spin(r, s),D)
(d) Si $\phi \in$ N (λ, SO(r,s),D) alors $\Psi = D\phi \in$ N(λ^2, SO(r, s),)

2.(a) $\sigma^*\square = \square\sigma^*$
(b) σ^*N(λ^2, SO(r, s), $\square$) $\subset$ N(λ^2, Spin(r, s) , $\square$)
(c) Si $\phi\in$ N(λ^2, SO(r, s), $\square$) alors on a $\Psi = D\phi+\lambda\phi \in$ N(λ, SO(r, s), D), [6]

Questions:

(1) Quelles sont les champs de vecteurs α de classe C^∞ définis sur SO(r,s), (resp. α sur Spin(r,s)) valeurs dans le CL(IR^n)-module H, telles que Ad(k)$\alpha = \alpha$, $\forall$ k $\in$ K(respAd($\tilde{k}$) $\alpha = \alpha\ \forall \tilde{k} \in \mathcal{K}$)

(2) Quelles sont les distributions spinorielles T ; (resp $\mathcal{T}$) éléments de C_C^∞ (SO(r,s),H); (resp C_C^∞ (spin(r,s) , $\mathcal{H}$) bi-invariantes par K = SO(r) x SO(s)

(resp $\mathcal{K}$ = Spin (r) x Spin(s)) ?

En général soit π : G $\rightarrow$ G/K La projection canonique posons f = $\tilde{f}$ o π avec

$f_{G/K}\tilde{f}$ (x)dx = $f_G f(g)dg$. Etendons l'opération $\tilde{f} \to f$ l'espace des distributions par:

Pour $T \in$ D'(G/K,H), on définit la distribution T sur G par : T(f) = T ($\tilde{f}$) ;

pour f $\in C_C^\infty$ (G, H) où f(gk) = $f_K f(gk)dk$, avec $f_K dk=1$.

Ainsi T est déterminée par ses valeurs sur l'espace C^∞(G/K,H).

Lemme 4.5:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(r,s) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{SO}(r,s) \\ \bar{\pi}\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \mathrm{M} \end{array}$$

Le diagramme est commutatif : $\pi \circ \sigma = \bar{\sigma} \circ \bar{\pi}$

Preuve: Pour u = $a_1a_2\ldots a_{2k} \in$ Spin(r,s) , $a_j \in IR^n$, avec $q(a_j) = 1$

Où $q(a_j) = -1$ (avec un nombre pair figurant dans l'écriture de u).

$\sigma(u) = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\ldots\sigma_{a_{2k}}$; $\pi(\sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\ldots\sigma_{a_{2k}}) = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\ldots\sigma_{a_{2k}}$. K

Alors $\bar{\pi}$ (u) = u K = ($a_1 K$)... ($a_{2k} K$)

$\bar{\sigma}(\bar{\pi}(u)) = \bar{\sigma}(uK)$ = $\bar{\sigma}$(u K) = $\sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\ldots\sigma_{a_{2k}}$.K

Corollaire 4.6: Pour T $\in$ (D'(M,H) où H est un CL($\wp$)-module, on associe la distribution $T^{\bar{\sigma}} \in$ D'(M ,H) définie par :$T^{\bar{\sigma}}$(f) = T(f o $\bar{\sigma}$) ; $\forall$ f $\in$D(M,H) où H est un CL($\wp$)-module avec $\wp$ et $\wp$ les algèbres de Lie de M et M .

Théorème 4.7: Les champs de vecteurs définis sur M à valeurs dans CL(IR^n)-module solutions propres relativement à l'opérateur de Dirac et qui sont K -invariants, sont les multiples des champs de vecteurs.

$\phi_\lambda(g\ K) = \int_K U(k)\ e^{(i\lambda-\rho)(H(gk))}dk$, g$\in G$, $\lambda \in a^*$, a^*= dual de l'algèbre de Lie du sous groupe abélien de G .

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}(m_\alpha)\alpha$$

avec m_α = dim g_α, U est un élément de CL(IR^n)-module, dk = mesure de Haar normalisée sur K .

V. Distributions spinorielles:

Définition 5.1: Si T est une distribution définie sur l'espace C^∞(M , H) On définit la distribution D T par:

D T (ϕ) = T ($D^*\phi$), $\forall\phi \in C^\infty$(M , H)

Comme D^* = D (auto-adjoint).

(D (T)(ϕ) = (T Dϕ)

Corollaire 5.2: La détermination des distributions spinorielles T , dépend de la détermination des solutions propres de l'équation $D\phi + \lambda\phi = 0$

Preuve: Comme (DT)(ϕ) = T (Dϕ) et si $D\phi = \mu\phi$

Alors T (Dϕ) = T ($\mu\phi$) = μ T (ϕ) = (D T)(ϕ)

Par suite (D T - μ T)(ϕ) = 0 comme ϕ est non nul comme champ de vecteurs défini sur M à valeurs dans CL(℘)-module par conséquent D T - μ T = $\tilde{0}$

Alors les distributions spinorielles sont déduites des fonctions propres de l'opérateur de Dirac. Désignons par C_C^∞ (SO(r; s);H)
l'espace vectoriel des champs de vecteurs définis sur SO(r,s)de classe C^∞ à valeurs dans H un CL(IR^n)-module à support compact, (resp les restrictions de D et □ à cet espace). [26, 8, 9]

Théorème 5.3:
Soit ω ∈ C_C^∞ (SO(r,s),H) bi-invariante par K = SO(r) x SO(s) et solution de l'équation Dθ + λθ = $\tilde{o}$.
Alors ω est aussi solution de □θ + μθ = $\tilde{o}$ avec μ = -λ².

Réciproquement si ω est solution de □θ + μθ = $\tilde{o}$, alors Dθ + $\sqrt{-\mu}\omega$ est solution de Dθ + λθ = $\tilde{o}$.
De plus par dualité on a : Si T ∈ D' (C_C^∞ (SO(r, s),H) bi-invariante par K et solution de DT+λ T = $\tilde{o}$.
Alors T est aussi solution de □T + μT = $\tilde{o}$ avec μ = -λ².
Réciproquement si T est solution de □T + μT = $\tilde{o}$ Alors T + $\sqrt{-\mu}T$ est aussi solution de DT + λT = $\tilde{o}$.

Preuve: La démonstration est basée sur le théorème précèdent, sur l'autoadjonction des deux opérateurs et sur leur relation, d'où :

Théorème 5.4: Il existe une relation intime entre les distributions spinorielles et les distributions sphériques qui est due à l'intime relation entre l'opérateur de Dirac D et l'opérateur de Laplace □ : D^2 =□. [8, 5, 12,16]

Remarques:

Nous allons généraliser ceci dans le cas des distribution T définies sur SO(r,s) bi-invariantes par K = SO(r) x SO(s) et qui sont solutions de l'opérateur de Dirac D:

(1) DT + λT = 0 et les distributions T définies sur spin(r,s) bi-invariantes par le groupe K = spin(r) x spin(s) solutions propres de l'opérateur D:

D T + μT =$\tilde{0}$.

(2) Pour déterminer les distributions spinorielles (resp. Cliffordiennes) il suffit de déterminer les solutions de l'équation Dω + λω = 0 où ω est un champ de vecteurs de classe C^∞ défini sur SO(r,s), et qui à valeurs dans un CL(IR^n)-module, car on a:

DT(ω) = T(Dω). Alors DT+λT = 0) ⇒ T(Dω + λω)=0

D'autre par à chaque champ de vecteurs ω sur SO(r,s) correspond un champ de vecteurs $\sigma^*\omega$ défini sur spin(r,s), appelé image transposée de ω par σ et comme D commute avec σ^*. Alors on a la:

Proposition 5.5: Si T est une distribution spinorielle définie sur spin(r,s).

Alors σ T est une distribution spinorielle définie sur SO(r,s):

σ T [ω] = T [$\sigma^*\omega$]

Proposition 5-6 : Pour

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

posons ρ = ||x|| = $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; (norme euclidienne)

$$I = \frac{1}{\rho}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

Alors D admet la décomposition suivante:

$D = D_{rad} - \frac{1}{\rho} D_{sph}$ pour $\rho \neq 0$ tels que on a :

(i) $D_{sph} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} e_i e_j (x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i})$

est l'opérateur de Cauchy-Riemann sphérique.

(ii) $D_{rad} = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{\partial}{\partial x_i})$

est l'opérateur de Cauchy-Riemann sphérique radial.

Preuve:

$$\frac{1}{\rho}(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \partial\rho ph) = \frac{1}{\rho}\sum_{\ell=1}^{n}[e_\ell x_\ell (\sum_{j=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e_\ell (x_i^2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} - x_\ell x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) -$$
$$\sum_{i=\ell+1}^{n} e_\ell (x_i x_\ell \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i^2 \frac{\partial}{\partial x_\ell}\quad] + R = \sum_{\ell=1}^{n}[e_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}\quad] + R = D + R$$

Où R = 0 car :

$$\rho^2 R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i\neq j, i\neq k \\ j<k}} e_i e_j e_k (x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_i x_k \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$$

Problème 5.7: Est ce que la décomposition de l'opérateur de Dirac en partie radiale et partie sphérique nous aide à la détermination explicite du spectre de l'opérateur de Dirac D lorsque celui ci est restreint à l'espace des polynômes homogènes de degré k.

VI. Noyau de Green de l'opérateur de Dirac:

Proposition 6.1: Soit Γ_n la fonction de Green de l'opérateur de Laplace □ définie par : $\Gamma_n(x) = \frac{1}{\omega_n (2-n)} \|x\|^{-(n-2)}$

$\forall n > 2$, où ω_n est l'aire de la surface de la sphère unité de $(IR^n, \| \ \|)$ où $\| \ \|$ la norme euclidienne.

$$\Gamma_2(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Log}(\|x\|)$$

Alors le champ de Clifford $K_n = D\Gamma_n$ est une solution fondamentale relativement à D (harmonique spineur) ; homogène de degré (1-n), invariant par le groupe spinoriel Spin (n). [17, 23, 26, 19]

Preuve:

$$\Gamma_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-n)\omega_n} \frac{1}{\|x\|_2^{n-1}} & \text{si } x \neq 0_{IR^{n+1}},\ n>2 \\ \frac{1}{2\pi} \mathrm{Log}(\|x\|) & \text{si } x \neq 0_{IR^2} \end{cases}$$

$K_{n+1}(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x}{\|x\|^{n-1}}$ si $x \neq 0_{IR^{n+1}}$

Comme $\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|^n) = nx_i\|x\|^{n-2}$ puis $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{x}{\|x\|^n}) = \frac{e_i}{\|x\|^n} - \frac{nx_i x}{\|x\|^{n+2}}$

vu que $x^2 = \|x\|^2$ dans $CL(IR^n)$ par suite:

$$D(\frac{x}{\|x\|^n}) = \frac{x}{\|x\|^{2n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\|x\|^n - n\|x\|^2\|x\|^{n-2}\right] = 0$$

Par suite $D\Gamma_{n+1} = K_{n+1}$, nous remarquons que K_n joue le rôle du noyau de Cauchy pour les fonctions harmoniques spineurs relativement à l'opérateur de

Dirac D et qui peut être utilisé via la projection stéréographique pour construire un spineur de Witten.

VII. Espace des polynômes $CL(IR^n)[t_1, t_2\ldots,t_p]$ bi-invariants par le groupe K = spin(r) x spin(s):

Soit $P \in CL(IR^n)[t_1, t_2,\ldots; t_p]$; $N_E = \{1, 2, \ldots , n\}$, $p \in IN\backslash\{0,1\}$

$P(t_1, t_2, \ldots; t_p) = \sum_{\alpha\subset N_E} a_\alpha t^\alpha$,

avec $a_\alpha \in CL(IR^n)$, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\ldots t_p^{\alpha_p}$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p)$ avec $1 \leq\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$

$a_\alpha = \sum_{\beta\subset N_E}\lambda_{\alpha,\beta}e_\beta, \lambda_{\alpha,\beta} \in IR$, et $\beta=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_m)$

Désignons par $CL_K(IR^n)[t_1, t_2,\ldots, t_p]$

$= \{P \in CL(IR^n)[t_1, t_2,\ldots, t_p] \,/\, \forall k \in K \,;\, Ad(k)P = P\}$

$Ad(k)P(t_1, t_2,\ldots, t_p) = \sum_{\alpha\subset N_E} ka_\alpha k^{-1}t^\alpha$

Pour cela, il suffit de calculer $ka_\alpha k^{-1}$, avec $k = e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\ldots e_{\gamma 2k} = e_\gamma \in K$, ce qui revient à calculer $(e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\ldots e_{\gamma_{2k}}).e_\beta.(e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\ldots e_{\gamma_{2k}})^{-1}$. On sait que:

$$\begin{cases} j\in\beta \Rightarrow e_j e_\beta = (-1)^{|\beta|-1}e_\beta e_j \\ j\notin\beta \Rightarrow e_j e_\beta = (-1)^{|\beta|}e_\beta e_j \end{cases} ..$$

On en déduit que : $e_je_\beta = e_\beta e_j$ si $|\beta|$ pair $j \notin \beta$

$e_je_\beta = - e_\beta e_j$ si $|\beta|$ pair $j \in \beta$

$e_je_\beta = - e_\beta e_j$ si $|\beta|$ impair $j \notin \beta$

$e_je_\beta = e_\beta e_j$ si $|\beta|$ impair $j \in \beta$ [9, 10]

Par Conséquent:

Calculons $ke_\beta = e_\gamma e_\beta = e_{\gamma1}e_{\gamma2}\ldots e_{\gamma2k}.e_{\beta_1}e_{\beta_2}\ldots e_{\beta_m}$

1er cas: Si $\beta\cap\gamma = \phi \Rightarrow ke_\beta = ke_\beta \Rightarrow ke_\beta k^{-1}=e_\beta$

2ème cas: Si $\beta\cap\gamma \neq \phi$ soit ℓ card$(\beta\cap\gamma) \Rightarrow ke_\beta = (-1)^{|\beta|-\ell}$

Par suite $ke_\beta k^{-1} = (-1)^{|\beta|-\ell} e_\beta kk^{-1} = (-1)^{|\beta|-\ell} e_\beta = e_\beta$ si $|\beta|-\ell$ est pair.

Par suite $|\beta| \equiv [2]$, donc $|\beta|$ et ℓ ont même parité D'où :

Lemme 7.1: $CL_{\bar{K}}(IR^n)[t_1, t_2, \dots, t_p]$ est constitué des polynômes définis par:

$P(t_1, t_2,\dots, t_p) = \sum_{\alpha\subset N_E} a_\alpha t^\alpha$

tels que $\forall k \in K$, $k= e_\gamma = e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\dots e_{\gamma_{2k}}$ avec $Ad(k)P=P$ si et seulement si on a l'une des cas suivants satisfaits:

(i) $\beta\cap\gamma = \phi$ où

(ii) $\beta\cap\gamma \neq \phi$ car card$(\beta\cap\gamma) = \ell$ avec $|\beta|$ et ℓ ont même parité.

VIII. Anti-involutions sur l'algèbre de Clifford $CL(IR^n)$:

On sait que l'algèbre de Clifford $CL(IR^n)$ est isomorphisme à l'algèbre End(S) des endomorphismes de l'espace des spineurs S et qu'à un produit scalaire pseudohermitien sur S est associe sur $CL(IR^n)$;

l'opération d'adjonction qui est une anti-involution de l'algèbre de Clifford

$CL(IR^n)$.

Réciproquement, pour toute anti-involution α sur l'algèbre $CL(IR^n)$ on définit une forme quadratique $\tilde{q}_\alpha$ sur $CL(IR^n)$ par:

$\forall u \in CL(IR^n)$;

$\tilde{q}_\alpha(u) = 2^{-n}Tr[\ell(u)\ \ell(u^\alpha)] = 2^{-n}Tr[\ell(u^\alpha)\ell(u)]$

$\tilde{q}_\alpha(u)$ est aussi la composante l'unité de $u^\alpha u$ dans une base (e_I) de $CL(IR^n)$. En particulier si $\alpha = \tau$ l'anti-involution principale de $CL(IR^n)$. qui laisse invariants les éléments de IR^n.

Alors $\tilde{q}_\tau$ est une extention de la forme quadratique q sur IR^n.

De plus on a : $\tilde{q}_\tau(gu) = 2^{-n}Tr({}^\tau u^\tau g^\tau gu) = \tilde{q}_\tau(u)= \tilde{q}_\tau(ug)$, $\forall g \in spin(r, s)$. D'où :

Théorème 8.1:
(1) Les représentations linéaires de Spin(r,s) par translations gauche, droite ou automorphismes intérieurs de $(CL(IR^n), \tilde{q}_\tau)$ sont orthogonales.

(2) $\tilde{q}_\tau$ est bi-invariante par spin(r,s)

(3) Il existe $u_0 \in CL(IR^n)$ tell que $\alpha = Ad(u_0) \circ \tau$, avec $\tau(u_0) = u_0$, ou $\tau(u_0) = u_0$ est déterminé à un facteur scalaire non nul près.

Preuve: Il suffit de montrer uniquement 3) ; d'après le théorème de Skolem-Nother la composée $\alpha\tau$ de deux anti-involutions est un antomorphisme intérieur de $CL(IR^n)$:

Pour $x \in CL(IR^n)$; $x^{\alpha\tau} = \upsilon x\upsilon^{-1}$ puisque $\tau^2 = Id_{CL(IRn)}$.

$x^\alpha = x^{\alpha\tau\tau} = (x^{\alpha\tau})^\tau = (\upsilon x\upsilon^{-1})^\tau = (\upsilon^{-1})^\tau x^\tau \upsilon^\tau = u_0^{-1} x^\tau u_0$ en posant $u_0 = \upsilon^\tau$.

Exprimons que α est aussi une involution

$x = x^{\alpha\alpha} = (u_0^{-1}x^\tau u_0)^\alpha = u_0^\alpha (x^\tau)^\alpha (u_0^{-1})^\alpha = u_0^{-1} u_0^\tau u_0 u_0^{-1} x u_0 u_0^{-1} (u_0^{-1})^\tau u_0 = u_0^{-1} u_0^\tau . x(u_0^{-1} u_0^\tau)^{-1}$.

Cette égalité exprime que $u_0^{-1} x^\tau$ commute avec tous les éléments x de $CL(IR^n)$ et comme $CL(IR^n)$ est centrale, c'est un scalaire inversible $\lambda.1_{CL(IRn)}$.

D'où $u_0^\tau = \lambda u_0$. Si $\lambda = \pm 1$ le théorème est déterminé. Si non $u_1 = u_0 + u_0^\tau = (1 + \lambda)u_0$ est τ-symétrique et $x^\alpha = u^{-1}_1 x^\tau u_1$. De plus, si l'on a $\upsilon^{-1}x^\tau\upsilon = u_0^{-1} x^\tau u_1 \; \forall x \in CL(IR^n)$

Il en résulte que $\upsilon^{-1}u_0$ est un scalaire et que $v = \lambda u_0; \neq 0$.

Corollaire 8.2:
(1) Soit α une anti-involution sur $CL(IR^n)$ qui s'écrit : $\forall x \in CL(IR^n)$;
$x^\alpha = u_0^{-1} x^\tau u_0$

u_0 est la matrice d'une forme hermitienne non dégénérée sur S l'espace des spineurs dont α est précisément l'opération d'adjonction.

(2) $\tilde{q}_\alpha = \tilde{q}_\tau$ sur $CL(IR^n)$.

Preuve: $\forall x \in CL(IR^n)$, $\tilde{q}_\alpha(x) = 2^{-n}Tr(\ell(x^\alpha)\ell(x))$ or $x^\alpha = u_0^{-1} x^\tau u_0 \Rightarrow$

$\ell(x^\alpha) = \ell(u_0^{-1}) \ell(x)^\tau \ell(u_\alpha)$.

$\ell(x^\alpha) \ell(x) = \ell(u_0^{-1}) \ell(x^\tau) \ell(u_0) \ell(x)$.

Par suite $\tilde{q}_\alpha(x) = 2^{-n}Tr[\ell(u_0^{-1})\ell(x)^\tau \ell(u_0) \ell(x)$.

$= 2^{-n}Tr(\ell(x^\tau) \ell(x)) = \tilde{q}_\tau(x)$.

IX. Invariance de la valeur propre de l'opérateur de Dirac tordu:

Soient υ l'automorphisme principale de $CL(IR^n)$ prolongement de $-Id_{IR}{}^n$ qui induit la décomposition de $CL(IR^n) = CL_+(IR^n) \oplus CL_-(IR^n)$, ρ l'isomorphisme d'identification de $CL(IR^n)$ et $End_{IK}(S)$,(avec IK le corps IR,C,IH) (appelée la représentation spinorielle définie par:

$$\begin{aligned}\rho : spin(r,s) &\to End(S)\\ u &\to L(u) : S \to S\\ x &\to ux\end{aligned}$$

On constate que ρ et $\rho \circ \upsilon$ sont équivalentes par conséquent il existe un isomorphisme γ de S tel que $\gamma^2 = -Id_S$ et que $\gamma e_i + e_i\gamma = 0$ pour i = 1, 2, ..., n, et que préserve le type de spineurs. [32, 25].

Proposition 9.1:
(1) L'opérateur de Dirac modifié $D' = \gamma D$ préserve le type du champ de spineurs et la valeur propre correspondante de l'équation $D'\psi = \lambda\psi$ pour ψ un champ de spineurs.
(2) Si $D' = (1_{CL(IR^n)} + \gamma).D.(1_{CL(IR^n)} + \gamma)^{-1}$ et si $D\psi = \lambda\psi$ alors $D'\phi = \lambda\phi$ si $\phi = (1+\gamma)\psi$.

Théorème 9.2:
Le morphisme de revêtement universel du groupe SO(r,s) induit un morphisme $\tilde{\sigma}$ entre l'ensemble des caractères $SO(r,s)$SO(r; s) et $spin(r,s)$. De plus $\tilde{\sigma}$ est bi-invariant par K = SO(r) x SO(s).

Preuve: $\sigma : Spin(r,s) \to SO(r,s)$;
qui induit le morphisme $\tilde{\sigma} : SO(r,s) \to spin(r,s)$ défini par:

$\forall \chi \in SO(r,s)$, $\forall g \in Spin(r,s)$

$\tilde{\sigma}(\chi)(g) = \chi(\sigma(g))$ où $\sigma(g) = u^{-1}gu$ pour $u \in Spin(r,s)$.

De plus $\forall k \in SO(r) \times SO(s)$.

$Ad(k) \tilde{\sigma}(\chi)(g) = Ad(k)\chi(\sigma(g)) = \chi(k^{-1}\sigma(g)k)$

$= \chi(k^{-1}(u^{-1}gu)k) = \chi((uk)^{-1}g(uk)) = \chi(g) = \chi(\sigma(g)) = \tilde{\sigma}(\chi)(g)$

Corollaire (Invariance des valeurs propres) 9.3:

L'opérateur de Dirac tordu D' = γD préserve les distributions spinorielles T définies sur Spin(r,s), à valeurs dans l'espace des spineurs S, bi-invariantes par K , solutions propre relativement l'opérateur de Dirac D.

Si $D' = (1_{CL(IR^n)} + \gamma).D(1_{CL(IR^n)} + \gamma)^{-1}$ et $DT = \lambda T$ alors $D'T_1 = \lambda T_1$ si $T_1 = (1 + \gamma).T$

Preuve: Pour tout $\psi \in C_c^\infty(G\,; S)$ bi-invariante par K telle que $D\psi = \lambda\psi$, d'après prop 9.1 $D'\psi = \lambda\psi$.
alors $D'T(\psi) = T(D'\psi) = T(D'\psi) = T(\lambda\psi) = \lambda T(\psi)$ d'où $D'T = \lambda T$.

(2) Raisonnement analogue à 1):

Corollaire 9.4:
Pour D' = γD, alors$\Box' = D'^2 = -\Box$ Si T une distribution sphérique définie sur le groupe Spin(r,s) bi-invariante par Spin(r)xSpin(s) solution propre relativement à l'opérateur$\Box$, associée à la valeur $-\lambda^2$. Alors la distribution T définie sur Spin(r,s) par : $T = -D'T + \lambda T$ est une distribution spinorielle solution propre

relativement l'opérateur de Dirac tordu D' associée la valeur propre -λ, bi-invariante par T .

Pour $D' = (1 + \gamma)D(1 + \gamma)^{-1}$, alors$\Box' = D'^2 = \Box$.

Si T est une distribution sphérique définie sur le groupe Spin(r,s), bi-invariante par Spin(r) x Spin(s) solution propre relativement à $\Box$, associée à la valeur propre λ^2.

Alors la distribution $T = D'T + \lambda T$ est une distribution spinorielle solution propre relativement à l'opérateur de Dirac tordu D' associée à la valeur propre λ, bi-invariante par ce groupe Spin(r) x Spin(s).

Preuve:
(1) Puisque $\gamma e_i + e_i\gamma = 0$ pour i = 1, 2, ..., n, alors $\gamma D = -D\gamma$ et$\Box' = -\Box$ par suite si $\Box T = -\lambda^2 T$ pour $T = -D'T + \lambda T \Rightarrow D'T = -D'^2T + \lambda D'T = -\lambda^2 T + \lambda D'T = -\lambda(\lambda T - D'T) = -\lambda T$.

La bi-invariance de T par Spin(r) x Spin(s) est une conséquence de l'invariance de D par la représentation adjointe de K .
(2) Pour $D' = (1 + \gamma)D(1 + \gamma)^{-1}$, alors$\Box' = D'^2 = \Box$, Si $\Box T = \lambda^2 T \Rightarrow T = D'T + \lambda T$ est une solution propre relativement à l'opérateur de Dirac tordu D' car $D'T = D'(D'T + \lambda T) = D'^2T + \lambda D'T = \lambda^2 T + \lambda D'T = \lambda(D'T + \lambda T) = \lambda T$.

X. Antiinvolutions de $CL(IR^n)$ et distributions Cliffordiennes et distributions spinorielles:

Théorème et définition 10.1:
Soient ϕ un champ de Clifford défini sur G = spin(r,s) bi-invariant par:
K = spin(r) x spin(s) et ff une anti-involution de $(CL(IR^n)$.

Alors on a :
ϕ est α-biinvariant par K .

L'opérateur de Dirac D vérifie l'égalité suivante.

$\forall\, k \in K$, $\alpha(k) \circ D = D \circ \alpha(k)$.
De plus si ϕ est solution propre relativement à D alors ϕ est solution propre de l'opérateur de Dirac tordu $\alpha(k) \circ D$ $\forall\, k \in K$ pour la même valeur propre.

On dit que ϕ est α-radiale lorsque ϕ est α-biinvariant par K .

Preuve:
(a) $\forall k \in K$, $\forall\, x \in G$.
$\phi(k^{-1}xk) = \phi(x)$, on sait que d'après le théorème de Skolem-Nother alors il existe $u \in CL(IR^n)$ tel que $\forall x \in CL(IR^n))$, $\alpha(x) = u^{-1}\tau(x)u = Ad(u) \circ \tau(x)$ où $\alpha(u) = u$ ou $\alpha(u) = -u$.
par suite $\phi(\alpha(k^{-1})x\alpha(k)) = \phi(x)$

(b) $\forall$ k$\in$ K , Ad(k) o D = D o Ad(k)
par suite α(k) o D = Ad(k) o τ o D = D o Ad(k) oτ = D o α(k).
d'où D est α-biinvariant par K
.

Corollaire 10.2:
La bi-invariance d'un champ de Clifford déni sur le groupe spinoriel Spin(r,s) ne dépend que l'anti-involution principale τ de l'algèbre de Clifford. Autrement dit elle est indépendante de toute anti-involution de CL(IR^n) autre que τ. D'où la nécessite de poser la définition suivante :

Définition 10.3:
Soit $\phi \in C^\infty$ (G ,CL(IR^n)) ; (resp C^∞ (G ,S)) ; on dit que ϕ est τ-sphérique Cliffordien (resp spinoriel) si ϕ est un champ de Clifford (resp de spineurs) τ-biinvariant par K solution propre de l'opérateur de Dirac D. Par conséquent il existe un caractère χ_ϕ déduite d'une représentation du groupe spinoriel à valeurs dans l'algèbre C^∞(G ,CL(IR^n)) (resp C^∞(G ,S)) telle que on a:

Dϕ(x) = χ_ϕ(x)ϕ(x) pour tout x $\in$ G .

Remarque 10.4:
Si ϕ est τ-sphérique Cliffordien (resp spinoriel), alors ϕ est aussi α-sphérique Cliffordien (resp spinoriel) ; pour toute anti-involution α de CL(IR^n).

L'ensemble $D'_{\natural K}$ (G ,CL(IR^n)),(resp $D'_{\natural K}$ (G ,S) des distributions Cliffordiennes (resp spinorielles) dénies sur G , τ-biinvariantes par K , solutions propres de l'opérateur de Dirac D, est constitué des champs de Clifford (resp de spineurs) τ-sphériques.

Selon Harish-Chandra les fonctions sphériques dénies sur G = SO(r,s) biinvariantes par K = SO(r) x SO(s) solutions propres de l'opérateur de Laplace sont données par la formules intégrale suivantes (à un facteur scalaire multiplicatif pres):

Théorème de Harish-Chandra 10.5:
Les fonctions sphériques relativement □ dénies sur M = G/K sont du type:

$\phi_\lambda(gk) = \int_K e^{(i\lambda-p)(H(g))}dk$ pour g$\in$ G = SO(r,s), K = SO(r) x SO(s),

ρ = demi-somme des racines positives avec leur ordre de multiplicité, ¸ $\lambda \in a^*_C$
(le complexifié de l'algèbre de Lie du sous-groupe abélien du groupe SO(r, s)).

Preuve [voir 23, 24, 14].

Corollaire 10.6:
Les champs de Clifford dénis sur M = SO(r,s)/SO(r)x SO(s) τ-sphériques (relativement l'opérateur de Dirac D) sont du type:

$$\psi_\lambda(gK)= \int_K [\lambda e^{(i\lambda-p)(H(gk)} + De^{(i\lambda-p)H(gk)}]dk$$

Preuve:
Pour la démonstration [voir 24, 23], de plus on a pu permettre $\int_K$ et D car K compact et l'application k $\rightarrow$ $e^{i(\lambda-e)(H(gk)}$ et ses dérivées partielles sont intégrables car elles sont continues sur un compact donc bornées on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int_K$.

Corollaire 10.7:
Si ϕ est un champ de Clifford défini sur le groupe SO(r,s) bi-invariant par K=SO(r) x SO(s), valeurs dans CL(IR^n) solution propre relativement l'opérateur de Dirac, associé la valeur propre λ.

Alors σ^*o ϕ est un champ de Clifford défini sur Spin (r,s) bi-invariant par K = Spin(r) x Spin(s), solution propre relativement à D pour la même valeur propre.

De plus σ^* o ϕ est solution propre de $\square$ associé à la valeur propre λ^2.

Preuve:

$\forall$ x $\in$ SO(r,s) , $\forall$ k $\in$ K = SO(r) x SO(s)
$(Ad(k)\phi)(x) = (\phi \text{ o } Ad(k))(x) = \phi(k^{-1}xk) = \phi(x)$
$D\phi(x) = \lambda\phi(x)$.
$\forall g \in$ Spin(r,s) $\sigma^* \text{ o } \phi(g) = \phi(\sigma(g))$, pour tout $\tilde{k} \in$ Spin(r) x Spin(s)
$Ad(\tilde{k}) \text{ o } \sigma^*\phi(g) = \sigma^* \text{ o } \phi(\tilde{k}^{-1} g \tilde{k}) = \phi(\sigma(\tilde{k}^{-1} g \tilde{k}))$
$= \phi(\sigma(\tilde{k}^{-1})\sigma(g)\sigma(\tilde{k})) = \phi(\sigma(g)) = \sigma^* \text{ o } \phi(g)$.

$D\sigma^* \text{ o } \phi(g) = D\phi(\sigma(g)) = \lambda\phi(\sigma(g)) = \lambda\sigma^* \text{ o } \phi(g)$.

comme $\square = D^2$, on en déduit que $\square (\sigma^* \text{ o } \phi) = \lambda^2(\sigma^* \text{ o } \phi)$.

Remarque 10.8:
σ^* est un coordinateur entre les champs de Clifford τ-sphériques définis sur SO(r,s) et les champs de Clifford τ-sphériques définis sur Spin(r,s).

Proposition et Dénition 10.9:
(1) Soit T $\in$ D'_K (SO(r,s), CL(IR^n)) solution propre relativement à l'opérateur de Dirac D, associée à la valeur propre λ. Alors on a :

(a) σ^*oT est une distribution Cliffordienne (élément de $D'_{\tilde{K}}$ (Spin(r,s),CL(IR^n)) distribution Cliffordienne solution propre de D pour la même valeur propre λ appelée distribution (τ,D)-sphérique de Clifford sur spin(r,s)).

(b) De plus σ^* o T est une distribution Cliffordienne solution propre relativement à $\square$ (appelée distribution (τ, $\square$)-sphérique de Clifford sur SO(r,s)).

(2) Réciproquement si T $\in$ D'_K (SO(r,s) , CL(IR^n)) solution propre relativement l'opérateur $\square$associée à λ^2. Alors on a:
(a) σ^* o T $\in$ $D'_{\tilde{K}}$ (SO(r,s), CL(R^n)) solution propre relativement à $\square$ pour la même valeur propre λ^2, appelée distribution (τ, $\square$)-sphérique de Clifford sur SO(r,s).

(b) De plus DT + λT et σ^*o (DT+λT) sont des distributions de D'_k (SO(r,s), CL(IR^n)) solution propre relativement D pour la valeur propre λ, appelée distribution (τ,D)-sphérique de Clifford sur SO(r,s).

Preuve: L'opérateur de Dirac est autoadjoint relativement au produit scalaire déduit de la forme quadratique q_τ sur CL(IR^n)):

Pour $\phi, \Psi \in C_C^\infty$ (SO(r,s), CL(IR^n)) on a : $< \phi, \Psi > = \int_G Tr[\phi(x)\Psi^\tau(x)]dx$.
T$\in$ D'_k (SO(r, s) , CL(IR^n)) telle que DT = λT par suite:

$D(\sigma^* \text{ o } T)(\lambda) = DT(\phi \text{ o } \sigma)= \lambda T(\phi \text{ o } \sigma) = \lambda(\sigma^* \text{ o } T)(\phi)$ par suite:

$D(\sigma^* \text{ o } T) = \lambda(\sigma^* \text{ o } T)$.

Comme $\square = D^2 \Rightarrow \square (\sigma^* \text{ o } T)(\phi) = D^2(\sigma^* \text{ o } T)(\phi)$

$= \lambda^2(\sigma^* \text{ o } T)(\phi)$.
$\Rightarrow \square (\sigma^* \text{ o } T) = \lambda^2(\sigma^* \text{ o } T)$

(2) Si T $\in$ D'_K (Spin(r , s) , CL(IR^n)) solution propre relativement à $\square$:

$\square T = \lambda^2 T$ on a $D(DT + \lambda T) = \lambda(DT+\lambda T)$ par conséquent on a:

$D[\sigma^* \text{ o } (DT + \lambda T)] = \lambda[\sigma^* \text{ o } (DT + \lambda T)]$.

Exemple (construite par Gelfand-Naimark):

Soit π une représentation unitaire pour le groupe spinoriel = G à valeurs dans l'espace des spineurs S, la fonction dénie sur G par ϕ(x) = (u|π(x)u) où u est un champ de spineurs unitaire cyclique invariant par K, ϕ est sphérique relativement □ alors on peut déduire un champ de spineurs (τ,D)-sphérique relativement à D et par conséquent une distribution spinorielle τ-sphériques sur G, en utilisant la proposition précedente.

A la mémoire de mon éminent Professeur Mr. Malliavin

C'est avec une peine inconcevable que l'image de mon professeur ne cesse de hanter notre mémoire.

Mr. Malliavin a en effet toujours concrétisé pour moi l'image pure d'un homme parfait aux qualités innombrables. J'ai toujours admiré en lui l'esprit de la générosité et la disposition à servir les autres et particulièrement ses disciples.

Et c'est pour toutes ces raisons que je me sens aujourd'hui obligé de remémoriser l'image de mon cher Professeur et je dois me recueillir face à son âme souhaitant qu'il soit entouré par la bénédiction divine qu'il mérité.

REFERENCES:

[1] Andrei Moroianu Spin Manifolds and Complex Contact structures Commun Math Physique 193, 661-674 (1998).

[2] Arthur Weichung chou, the Dirac Operator on Spaces with Conical singularities and positive scalar Curutures Trans. Amer. Math. Soci , vol 289,N1, 1985 p1-40.

[3] E Badertscher and H. M. Riemann. Harmonic Analysis for Vector Fields. Math. Zeitschrift 202, 431-456 (1986).

[4] Ben Ammar Mohamed Relation entre les distributions sphériques et les distributions spinorielles dans l'algèbre de Clifford. Bull. Math. Soc. Sc Math. Roumanie Tome 41 (89) N2, 1997 p57-95.

[5] Ben Ammar Mohamed: Structures sur les espaces des spineurs quaternioniens et structures sur les espaces des spineurs réels Rend. Seminario Math, di Messina serie II, vol II 1993 pp1-10.

[6] Ben Ammar Mohamed. Des Résolutions de l'opérateur de Dirac et l'Algèbre de Clifford dans l'analyse harmonique Math 4, 91-114 (2007).

[7] Christian Bar, the Dirac Operator on spaces forms of positive curvature. J. Math Soc. JAPAN. Vol 48 N1, 1996 p69-83.

[8] R.Camporesi the spherical tranform for homogenous vector bundles over Remannian symmetrics spaces Journal of Lie theory volume 7 (1997) 29-60.

[9] R-Comporesi Harmonic Analysis for spinor fields in complex hyperbolic spaces Advances Math 154,367-442 (2000). [10] R. Deheuvels Tenseurs Spineurs Presse Universitaire de France 1993.

[11] R. Deheuvels : Quelques applications des algèbres de Clifford la géométrie. RIV. MATH. UNIV. PARMA (4) 14* (1998) 55-67.

[12] R. Deheuvels Formes quadratiques et groupes classiques Presse Universitaire de France 1981

[13] J. Faraut and A. KORANYI: Analysis on symmetric cones.

[14] J. Faraut. Distributions sphériques J. Math pures et appl 58, 1979, p369-444.

[15] J. Faraut opérateurs différentiels invariants hyperboliques sur un espace symétrique ordonné Journal. Of the theory vol 6 (1996) 271-289.

[16] L. Fatibene, M. Francaviglia, Spin structures on monifolds Seminari Di Geometria 1996 p70-98.

[17] M. Flensted Jensen : Spherical functions on simply connected semi-simple Lie group. Amer. Journal of Math vol 99 N2 (1997) pp341-361.

[18] H. D Fegan and B. STEER, Spectral symmetric of the Dirac operator in the Presence of a group action Trans. Amer. Math. Soc vol 335 N2 (1993) p631-647.

[19] Fred Bracks Nele Schepper and F Sommen. Metric Dependent Clifford Analysis with Applications toWavelet Analysis. Olevator theory Advances and applications Vol 167, 17-67 (2006).

[20] Y. Gtel and D. Yafaev Scattering theory for the Dirac operator with a long-Range Electromagnetic potential Journal. Funct. Analysis 184, 136-176 (2001).

[21] Jean Pierre Bouruignon L'operateur de Dirac et la géométrie riemannienne Rend. Sem. Math. Univ, Politec Tarino vol 44, 3 (1986) 317-359.

[22] John Lott, The Dirac operator and Conformal Compactification. International. Math. Research Notes N4 (2001) p171-178.

[23] Harish-chandra. Invariant Diff operators and Distributions on semi-simple Lie algµebres Amer. Journal. Math; vol LXXXVI, 1964 p534-554.

[24] Helgason. Sigurdur Analysis on Lie groups and homogeneons spaces N4 Amer. Math. Soc. P24-36.

[25] Hizuchi Atushi Roberto Comporesi on the eignfunctions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces Journal of Geometry and physic 20 (1996) p1-18.

[26] Hotta. R. and M. Kashiwara. The invariant holonomic system on a semi-simple Lie algebres. Inventiones. Math 75, 327-358 (1984).

[27] Laurent. Yves Regularity of D-Modules Associated to a symmétric pair, Ar XIV. Math/ 0301296VI(2003) [28] K. Michael. Schmidt Ar XIV. Math/0111115VI,(2001)

[29] Ochiai Hiroguki, invariant distributions on a non-isotropic pseudo Riemenn symmetric space of rang one Indag. Math. N.S (16)(3-4) pp631- 638.

[30] F.Sommen, V. Souc^ek and P. Van Lancker Rarita Schwinger type operator in Clifford Analysis. Journal.Funct. Analysis 185 p425-455 (2001).

[31] F. Sommen, Special functions in Clifford Analysis and Axial symmetry. Journal. Math Analysis and Applications 130, 110-133 (1988).

[32] A. Trautman, The Dirac operator on Pin Manifolds The Erwin Schrodinger international, Institue for Math. Phy vienna EST 149 (1994)

[33] Toriaki Kori, The index of the Dirac operator on S4 and the infinite dimensional Grassmannian on S3 Japan. J. Math. Vol. 22, N11996 p1-36.23

****

